TD 8

Définition :
La classe des *fonctions primitives récursives* $\mathcal{PR} \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ est définie inductivement comme suit :

- l'identité id : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ appartient à $\mathcal{PR}$
- si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ et $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ sont primitives récursives, $g \circ f$ est primitive récursive.
- les fonctions constantes sont primitives récursives
- les projections
$$\begin{array}{rlcl} \pi_{i,n}: & \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ & (x_0,\ldots,x_{n-1}) & \mapsto & x_i \end{array}$$
sont primitives récursives.
- si $(f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$ et $(g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m) \in \mathcal{PR}$, alors, le pairing
$$\begin{array}{rlcl} \langle f,g\rangle: & \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N}^{k+m} \\ & x & \mapsto & (f(x),g(x)) = (\pi_{0,k}(f(x)),\ldots,\pi_{k-1,k}(f(x)),\pi_{0,n}(g(x)),\ldots,\pi_{n-1,n}(g(x))) \end{array}$$
est primitif récursif
- $S : x \mapsto x+1$ est primitive récursive
- si $(r : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$ and $(z : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k) \in \mathcal{PR}$, alors l'unique fonction $\mathrm{rec}(z,r) : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^k$ satisfiant les équations suivantes est primitive récursive.
$$\begin{array}{lcl} \mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},0) & = & z(x_0,\ldots,x_{n-1}) \\ \mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},m+1) & = & r(x_0,\ldots,x_{n-1},\mathrm{rec}(z,r)(x_0,\ldots,x_{n-1},m)) \end{array}$$

Exercice 1.
Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. L'addition et la multiplication.
2. La fonction *prédécesseur* p définie par $p(n) = \max(0, n-1)$.
3. La fonction *quasi-différence sub* définie par $sub(n,m) = n - m$ si $n \geq m$ et 0 sinon.
4. La fonction *égalité à* 0 $eq0$ définie par $eq0(n) = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon.
5. La fonction *égalité eq* définie par $eq(m,n) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.
6. La fonction *division div* ou $div(m,n)$ est le quotient de la division euclidienne de n par m.
7. La fonction *reste mod* ou $mod(m,n)$ est le reste de la division euclidienne de n par m.
8. La fonction *puissance pow* où $pow(n,m) = m^n$.
9. La fonction *base* où $base(x,b,i)$ est le i-éme chiffre de x en base b.
10. La fonction $ifThenElse(b,x,y)$ qui vaut y si b vaut 0 et x sinon.
11. La fonction *logarithme log* où $log(n,m)$ est le logarithme en base m de n, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $m^k \leq n$.
12. La fonction *premier prime* où $prime(p) = 1$ si p est premier et 0 sinon.
(*Indice : on pourra définir une ou des fonctions intermédiaires.*)

Définition :
La classe des *fonctions récursives* $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}^k$ (attention, il s'agit de fonctions partielles et non forcément totales !) est la plus petite classe stable par toutes les clauses données pour les fonctions primitives récursives et le *schéma de minimisation*. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ est récursive, alors la fonction partielle

$$\begin{array}{rccl} \mu(f): & \mathbb{N}^n & \rightharpoonup & \mathbb{N} \\ & (x_0,\ldots,x_{n-1}) & \mapsto & \min\left\{ z\in\mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{ll} f(x_0,\ldots,x_{n-1},k)>0 & \text{pour } k<z \\ f(x_0,\ldots,x_{n-1},z)=0 & \end{array} \right\} \end{array}$$

est également récursive.

Exercice 2.

1. Combien existe-t-il de fonctions récursives primitives ?
   (Indice : on pourra considérer une définition « par le bas » des fonctions récursives.)
2. En déduire qu'il existe des fonctions qui ne sont pas primitives récursives.
3. Qu'en est-il des fonctions récursives ?

Exercice 3.
Soit $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une application. On rappelle que la fonction indicatrice du graphe de f est définie par

$$\begin{array}{rccl} \delta_f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } f(x)=y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est récursive si et seulement si δ_f l'est également.

Exercice 4.
On définit la fonction d'Ackermann $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ comme :

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m=0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m>0 \text{ et } n=0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{si } m>0 \text{ et } n>0 \end{cases}$$

On a par exemple :

$$A(0,n)=n+1 \quad A(1,n)=n+2 \quad A(2,n)=2n+3 \quad A(3,n)=2^{n+3}-3$$

On admettra que cette fonction est **totale** et **strictement croissante** en ses deux arguments.
On définit de plus $sum_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ renvoyant la somme de ses arguments. On admet que sum_k est primitive récursive pour tout $k \in \mathbb{N}$

1. Montrez que pour tout entiers naturels $m,n \in \mathbb{N}$, on a$A(m+1,n) \geq A(m,n+1)$ et $A(m+2,n) \geq 2\,A(m,n)$.

Pour f une fonction primitive récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$, on note $P(f)$ la propriété :

$$\exists C(f)\in\mathbb{N}, \forall n_1,\ldots,n_k \in\mathbb{N}, sum_m \circ f(n_1,\ldots,n_k) \leq A(C(f), sum_k(n_1,\ldots,n_k))$$

2. Montrez que $P(f)$ est vrai pour les fonctions identité, successeur, constantes, et projections. Montrez que si $P(f)$ et $P(g)$ sont vrais, alors $P(g\circ f)$ et $P(\langle f,g\rangle)$ sont vrais.

3. Montrez que si $P(z)$ et $P(r)$ sont vrais, alors il existe $C(rec(z,r)) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ on ait :

$$sum_k(n_1, \ldots, n_k) + sum_m \circ rec(z,r)(n_1, \ldots, n_k) \leq A(C(rec(z,r)), sum_k(n_1, \ldots, n_k))$$

On en déduit alors par induction structurelle que $P(f)$ est vrai pour toute fonction récursive primitive f.

4. Montrez que la fonction $n \mapsto A(n,n)$ n'est pas primitive récursive. Déduisez-en que la fonction d'Ackermann ne l'est pas non plus.

5. **(Facultatif)** Expliquez (sans entrer dans les détails) comment on peut calculer Ackermann à l'aide d'une Machine de Turing.

Cela fait de la fonction Ackermann une fonction récursive mais non primitive récursive.