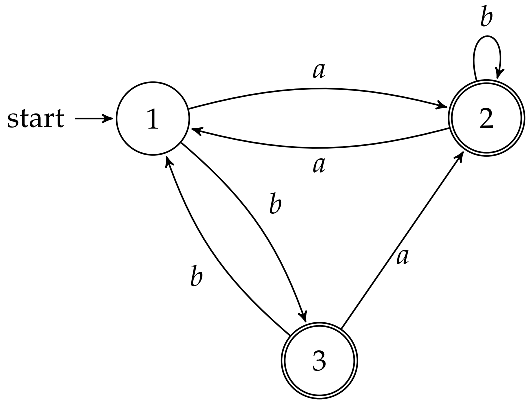
TD 8 (Révisions)

Exercice 1.
Donner une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate ci-dessous (utiliser l'algorithme vu en cours) :



Exercice 2. *Distançons*
On définit la distance de Hamming d'un mot w à v de même taille comme le nombre de positions pour lesquelles ils diffèrent. La distance entre un mot w et un langage L est la distance minimale de w aux mots de L (infinie si non définie).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L rationnel. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est rationnel.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L algébrique. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est algébrique.
3. Soit L un langage rationnel, et L' l'ensemble des mots w à distance au plus $\frac{|w|}{2}$ de L. Montrez que L' est algébrique.

Exercice 3.
Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $L = \{0^n 1^n 0^n 1^n | n \geq 0\}$.
2. $L = \{0^n \# 0^{2n} \# 0^{3n} | n \geq 0\}$.
3. $L = \{w\#s | w$ est un sous-mot de $s, s \in \{a, b\}^*\}$.

Exercice 4.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\Sigma = \{0, 1\}$. On définit le langage L sur Σ comme le langage des mots ayant un 1 en i^{e} position avant la fin. Par exemple si $i = 2$ alors $0010 \in L$ mais $1100 \notin L$.

1. Donner un automate non déterministe avec $i + 1$ états reconnaissant L.
2. Soit w un mot de Σ avec $i - 1$ lettres. Calculer le langage résiduel $w^{-1}L = \{v \in \Sigma^* | wv \in L\}$.

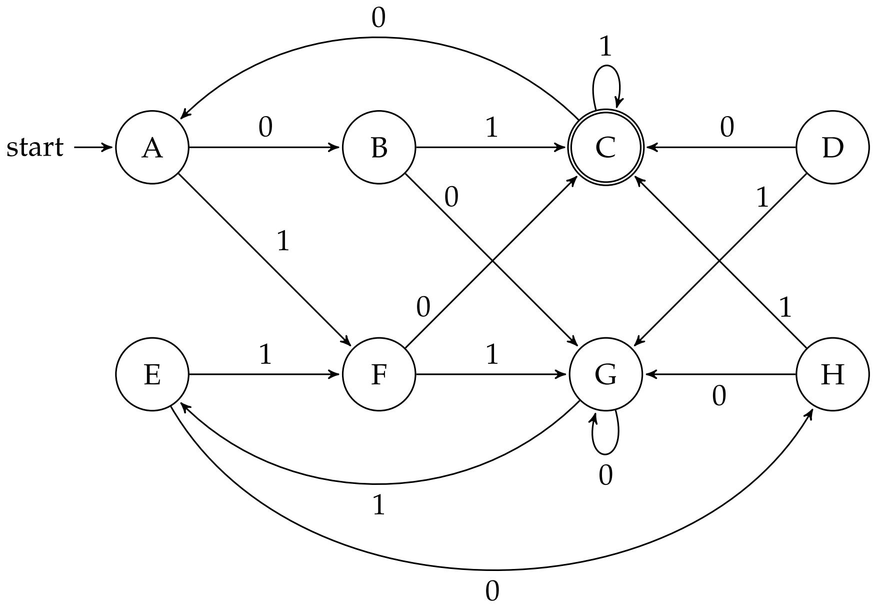
3. En déduire une borne sur le nombre d'états de n'importe quel automate déterministe reconnaissant L. La comparer avec le nombre d'états dans la question 1.

Exercice 5.
Si $\mathcal{A}$ est un automate non-déterministe, appelons

— $M(\mathcal{A})$ l'automate mirroir de $\mathcal{A}$: les états finaux deviennent initiaux, les états initiaux finaux et les transitions changent de sens.

— $D(\mathcal{A})$ l'automate déterministe associé à $\mathcal{A}$, restreint à ses états accessibles

1. Soit $\mathcal{A}$ l'automate suivant. Minimiser $\mathcal{A}$, puis calculer $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$.



2. Montrer que $\mathcal{A}$, $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$ est minimal pour tout $\mathcal{A}$.

Exercice 6. *Préfixons*
Pour un langage L, on définit $min(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui n'ont pas de préfixe stricts dans L :

$$min(L) = \{w \in L \mid \forall v \text{ préfixe strict de } w,\ v \notin L\}$$

1. Soit L algébrique et déterministe. Prouvez que $min(L)$ est algébrique et déterministe.

2. Soit $L = \{a^i b^j c^k \mid k \geq i \text{ ou } k \geq j\}$. Montrez que $min(L)$ n'est pas algébrique.

3. On définit $max(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui ne sont pas le préfixe strict de mots de L. Trouvez un langage algébrique L tel que $max(L)$ ne soit pas algébrique.

Correction sans détails de l'exercice sur les mélanges :

Exercice 7. *Mélange*

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :

— si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$

— si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$

— si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\mathrm{Mel}(u,v')$.

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.

1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est rationnel. ☞ Le mélange est l'ensemble des mots ayant un nombre pair de a et un nombre de b multiple de 3. Chacun de ces deux langages sur $\{a,b\}$ est rationnel, donc l'intersection aussi.

2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ? ☞ Oui. Soient $(Q_1, q_{01}, F_1, `d_1)$ et $(Q_2, q_{02}, F_2, `d_2)$ des automates déterministes reconnaissant chacun des deux langages. On construit l'automate non déterministe suivant (qui ressemble à l'automate produit) pour reconnaître le mélange : $(Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2, `d)$ où $`d$ consiste à choisir de façon non déterministe à faire la transition sur l'automate 1 ou sur l'automate 2 : $`d((q_1,q_2),`a) := \{(q_1, `d_2(q_2,`a)); (`d_1(q_1,`a), q_2)\}$.
Si un mot appartient au mélange alors en faisant les bons choix on arrive dans un état final. Réciproquement, s'il existe un chemin acceptant pour le mot w alors il existe u et v (déterminé par les choix de l'automate), reconnus respectivement par l'automate 1 et l'automate 2, tels que $w = \mathrm{Mel}(u,v)$.

3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique. ☞ On construit l'automate à pile reconnaissant $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et on lui ajoute une transition : quand il lit un c, il l'ignore (ni changement d'état ni modification de la pile).

4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique. ☞ Même construction que pour le mélange d'un algébrique et d'un rationnel.

5. (Bonus) Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ? ☞ Non. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est algébrique, $\{c^m d^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ aussi, mais si le mélange des deux l'était, son intersection avec $a^*(bc)^*d^*$, qui est $\{a^n (bc)^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ le serait aussi. Or ce dernier langage n'est pas algébrique, il suffit d'utiliser le lemme d'Ogden