TD 7

Exercice 1. *Comptons*

1. Donner un automate à pile déterministe reconnaissant le langage suivant :

$$L = \{a^m b^n c^{2(m+n)} | n, m \geq 0\}$$

2. Prouver la correction de votre automate.

Exercice 2. *Recomptons*

Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants par état final, et justifier leur correction :

1. $L = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = |u|_b\}$
2. $L = \{a^i b^j c^k : i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$

Exercice 3. *Intersectons*

Pour cet exercice, on considère que pour un langage X et $n \in \mathbb{N}, X^n = X \cdot X \cdot \ldots \cdot X = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid \forall i, w_i \in X\}$.

1. Soit X et Y deux langages réguliers. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \cap Y^n$ est algébrique mais pas forcément régulier.
2. Trouver trois langages X, Y et Z tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \cap Y^n \cap Z^n$ n'est pas algébrique.

Exercice 4. *Distançons*

On définit la distance de Hamming d'un mot w à v de même taille comme le nombre de positions pour lesquelles ils diffèrent. La distance entre un mot w et un langage L est la distance minimale de w aux mots de L (infinie si non définie).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L rationnel. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est rationnel.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L algébrique. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est algébrique.
3. Soit L un langage rationnel, et L' l'ensemble des mots w à distance au plus $\frac{|w|}{2}$ de L. Montrez que L' est algébrique.

Exercice 5. *Préfixons*

Pour un langage L, on définit $min(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui n'ont pas de préfixe stricts dans L :

$$min(L) = \{w \in L \mid \forall v \text{ préfixe strict de } w,\ v \notin L\}$$

1. Soit L algébrique et déterministe. Prouvez que $min(L)$ est algébrique et déterministe.
2. Soit $L = \{a^i b^j c^k \mid k \geq i \text{ ou } k \geq j\}$. Montrez que $min(L)$ n'est pas algébrique.
3. On définit $max(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui ne sont pas le préfixe strict de mots de L. Trouvez un langage algébrique L tel que $max(L)$ ne soit pas algébrique.