TD 4

Exercice 1. *Mettons de l'ordre*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 2. *Éléments de langage*

Quels sont les langages engendrés par les grammaires suivantes ?

1. $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$
2. $S \longrightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$
3. $S \longrightarrow SaSb \mid SbSa \mid \varepsilon$
4. $S \longrightarrow aSb \mid bY \mid Ya$
   $Y \longrightarrow bY \mid aY \mid \varepsilon$

Exercice 3. *Morceaux de grammaires*

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants.

1. L'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$ et son complémentaire.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b.
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b.
5. $\{w\#\overline{w}\#,\ w \in (a+b)^*\}$, avec $\overline{w_1 w_2 \dots w_n} = w_n \dots w_2 w_1$.
6. $\{w\#w' | w, w' \in (a+b)^*$ et $w \neq w'\}$.
7. L'ensemble des mots de $(a+b)^*$ qui ne sont pas de la forme ww.
   Indication : les mots qui ne sont pas de la forme ww et qui sont de longueur paire sont de la forme xy avec x et y de longueur impaire, et une autre condition sur x et y.

Exercice 4. *Un peu de programmation*

$Stmt \rightarrow$ **if b then** $Stmt$ | **if b then** $Stmt$ **else** $Stmt$ | **a**

1. Montrer que cette grammaire est ambiguë.
2. Proposer une grammaire non ambiguë pour le même langage.

Exercice 5. *Si vous vous ennuyez...*

Parmi les langages suivants il y a *au moins un* langage algébrique et *au moins un* non-algébrique. Choisissez deux langages tels que un est algébrique et l'autre non et démontrez le (pour montrer qu'un langage est non-algébrique vous utiliserez le lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte) :

1. $\{w \in \{a,b\}^* \text{ tels que } |w|_b = 2|w|_a + 3\}$
2. $\{w\#x \mid w, x \in \{a,b\}^* \text{ et } w \text{ est un sous-mot de } x\}$.
3. $\{a^p \mid p \text{ est premier}\}$.
4. $\{a^{n_0}ba^{n_1}b\cdots a^{n_k}b | k \geq 0 \text{ et } \exists j \geq 0, n_j \neq j\}$