TD 3

Devoir maison : les exercices 6 et 7 sont à rendre pour le 16 octobre, en TD ou dans nos casiers au 3ème (situés dans le bocal à imprimantes). Ça comptera un petit peu pour la note de contrôle continu.

Exercice 1. *Minimisation*

Définition 1 (Congruence de Nérode)**.** *Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. La congruence $\sim$ suivante, vue en cours, s'appelle la congruence de Nérode :*

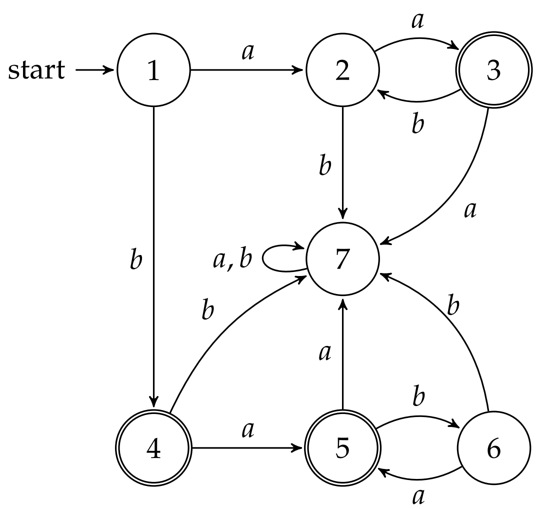
$$q \sim q' \quad ssi \quad \forall u \in \Sigma^* \; \delta^*(q,u) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q',u) \in F$$

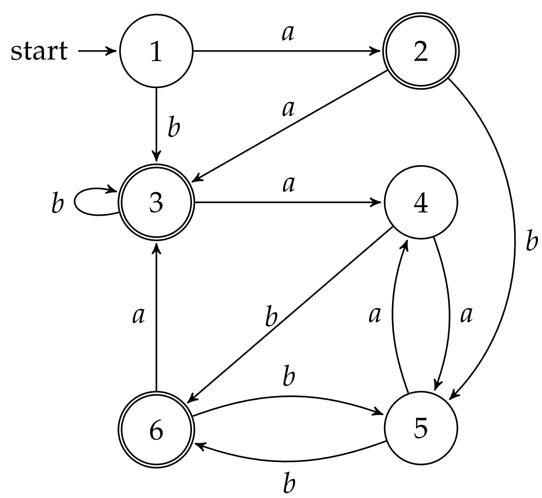
Définition 2 (Algorithme de Moore)**.** *Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. On définit $\sim_i$ sur Q par :*

$$q \sim_0 q' \quad ssi \quad (q, q' \in F \text{ ou } q, q' \notin F)$$
$$q \sim_{i+1} q' \quad ssi \quad q \sim_i q' \text{ et } \forall a \in \Sigma, \delta(q,a) \sim_i \delta(q',a)$$

pour tous états q, q' de Q et pour tout $i \geq 0$.
L'alogrithme de Moore consiste à calculer la suite des $\sim_i$ jusqu'à un indice k tel que $\sim_k = \sim_{k+1}$, auquel cas on renvoie $\sim_k$.

1. Rappeler pourquoi l'algorithme de Moore termine et renvoie la congruence de Nérode. Quelle est sa complexité ?
2. Exécuter l'algorithme de Moore sur les automates suivants et donner les automates minimaux correspondants :





Exercice 2. *Asymétrie*
Calculer les résiduels de Σ^*a et $a\Sigma^*$. Méditer.

Exercice 3. *Mettons de l'ordre*
Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 4. *Scinder, séparer*

1. Soit A un langage régulier infini. Prouvez qu'on peut scinder A en deux sous-ensembles réguliers infinis.

Soient B et D deux langages. On note $B \Subset D$ si $B \subseteq D$ et $D \setminus B$ est infini.

2. Montrez que pour tous langages réguliers B et D tels que $B \Subset D$ il existe un langage C régulier tel que $B \Subset C \Subset D$.

Exercice 5. *Liste*
Pour chacun des langages L suivant :
- Si L est régulier : donner le nombre d'état de l'automate minimal de L
- Si L n'est pas régulier : exhiber un nombre infini de résiduels de L

1. $L_1 = \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{w\bar{w}, w \in \{0,1\}^*\}$.
3. $L_3 = \{x \in \{0,1\}^* | \ |x|_0$ pair et $|x|_1$ impair $\}$.
4. $L_4 = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid$ chaque bloc de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros$\}$.
5. $L_5 = \{x \in \{0,1\}^* | \ |x|_0 = |x|_1\}$.
6. L_6 est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{\text{ième}}$ lettre en partant de la fin est un a.
7. $L_7 = \Sigma^* \setminus \{ww : w \in \Sigma^*\}$.

Exercice 6. *1 est presque pair*
On définit sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ le langage L composé de tous les mots non vides qui contiennent soit un seul b, soit un nombre pair de b. Calculez tous les langages résiduels de L, puis en déduire l'automate minimal qui reconnaît L.

Exercice 7. *Chacun son reste*

1. Pour tout alphabet de deux lettres ou plus, trouver un langage L tel que tous les mots aient des résiduels distincts, i.e. $u^{-1}L = v^{-1}L \Rightarrow u = v$.
2. Caractériser tous les langages avec cette propriété sur les alphabets à une lettre.