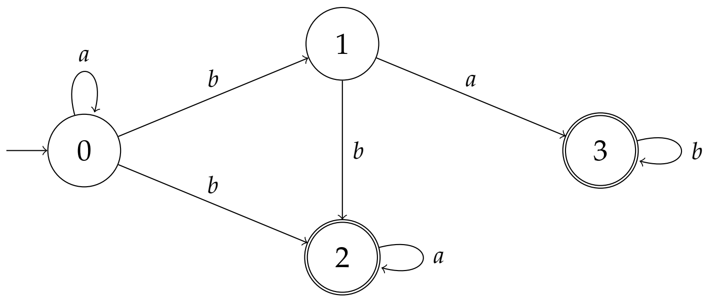
TD 2

Exercice 1. *Détermination*

Déterminiser, puis émonder, l'automate suivant :



Exercice 2. *Rien*

Montrer que pour tout automate avec ϵ-transitions, il existe un automate non-déterministe sans ϵ-transitions reconaissant le même langage.

Exercice 3. *Substitution*

Soit Σ, Γ deux alphabets finis. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \Gamma = \{a, b\}$.
   — $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   — $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle $b^* ab^*$.
2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel.
   Indice : exprime-toi de façon rationnelle.

Pour un langage L et un morphisme $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

3. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   — $\Sigma = \Gamma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.
   — $\Sigma = \Gamma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.
4. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.

Exercice 4. *Jeu de mots*

1 - On définit x^R comme le mot x écrit à l'envers et pour tout langage L, on définit $L^R = \{\omega^R | \omega \in L\}$. Montrer que si L est rationnel alors L^R est aussi rationnel.
2 - Soit

$$\sum\nolimits_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\sum_3$ contient toutes le colonnes de taille 3 de 0s et de 1s. Une chaîne de symboles de $\sum_3$ donne ainsi 3 lignes de 0s et de 1s. Considérons chaque ligne comme un nombre binaire et posons

$$B = \{\omega \in \Sigma_3^* |\text{ la ligne du bas de } \omega \text{ est la somme des deux lignes supérieures}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \text{ mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Montrer que B est rationnel.
3 - Soit

$$\sum\nolimits_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De même chaque mot sur $\sum_2^*$ forme deux mots sur $\{0,1\}^*$. Posons,

$$C = \{\omega \in \Sigma_2^* |\text{ la ligne du bas de } \omega \text{ est trois fois la ligne du haut}\}$$

$$D = \{\omega \in \Sigma_3^* |\text{ la ligne du haut de } \omega \text{ est supérieure à la ligne du bas}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D,$$

$$\text{mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin D.$$

Montrer que C et D sont rationnels.

Exercice 5. *Occupation*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\mathrm{CYCLE}(L) = \{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. $\mathrm{MAX}(L) = \{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. $\mathrm{MIN}(L) = \{x \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
4. $\mathrm{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
5. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
6. $\mathrm{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
7. $\mathrm{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
8. $\mathrm{SWAP}(L) = \{a_2a_1a_4a_3 \dots a_{2n}a_{2n-1} |\ a_1a_2 \dots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
9. $\mathrm{ERASE}(L) = \{a_1a_3 \dots a_{2n-1} |\ a_1a_2 \dots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
10. $K^{-1}L$ où K est un langage quelconque sur le même alphabet
11. $\{w \in \Sigma^* | w^{|w|} \in L\}$
12. $\{w \in \Sigma^* | w^{p(|w|)} \in L\}$ où $p \in \mathbb{N}[X]$