TD 14

Exercice 1.

THÉORÈME DE RICE [HENRY RICE, 1953] : Toute propriété non triviale (c'est-à-dire qui n'est ni toujours vraie ni toujours fausse) sur les langages récursivement énumérables est indécidable.

1. Donner des exemples de propriétés non triviales sur les langages récursivement énumérables.
2. En quoi le problème de l'ARRÊT est-il un cas particulier du théorème de Rice ?
3. Démontrer le théorème de Rice.
4. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si la machine donnée en entrée ne s'arrête sur aucune entrée ?
5. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si le domaine de la machine donnée en entrée est infinie ?
6. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si les deux machines passées en argument calculent la même fonction ?

Exercice 2.

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ϵ désignera le mot vide. Fixons une bijection entre l'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ et Σ^*. On notera $\langle M \rangle$ l'image de la machine de Turing M par cette bijection.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ?

1. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(\langle M \rangle) \text{ s'arrête}\}$
2. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, L(M) = \emptyset\}$
3. $\{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \in (\Sigma^*)^2, L(M_1) = L(M_2)\}$
4. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(ab)M(ba) = aaa\}$
5. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(\langle M \rangle) = \langle M \rangle\}$
6. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M \text{ s'arrête sur une partie infinie de } \Sigma^*\}$

Exercice 3.

Soit $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une application. On rappelle que la fonction indicatrice du graphe de f est définie par

$$\begin{array}{rccl} \delta_f : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est récursive si et seulement si δ_f l'est également.

Exercice 4.

1. Soit $(\varphi_e)_{e\in\mathbb{N}}$ une énumération des fonctions primitives récursives de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction primitive récursive $\mathcal{U} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{U}(e,k) = \varphi_e(k)$, c'est à dire qu'il n'y a pas de fonctions primitive récursive "universelle".
2. Montrer qu'il existe une fonction récursive qui domine asymptotiquement toutes les fonctions primitives récursive.

Exercice 5.
On va supposer que l'on choisit une fonction d'encodage $e \mapsto \varphi_e$ "raisonnable" des fonctions récursives partielles de type $\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ ($X \rightharpoonup Y$ désigne l'ensemble des fonctions partielles de X vers Y). L'objectif de cet exercice est de prouver l'énoncé suivant, que l'on appellera le lemme de branchement :

Soit $W \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble récursivement énumérable et $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ une fonction récursive partielle telle que pour tout $e \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_e = f$, on a $e \in W$. Alors, pour tout $g \in \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}$ récursive partielle, il existe $k \in \mathbb{N}$ et un indice $e' \in W$ tels que

$$\varphi_{e'}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n < k \\ g(k,n) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que si W est un ensemble récursivement énumérable, il existe une fonction récursive totale $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $W = \mathrm{Im}(w) = \{w(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Considérer la fonction partielle suivante

$$\begin{array}{rccl} B: & \mathbb{N}^2 & \rightharpoonup & \mathbb{N} \\ & (e,n) & \mapsto & \begin{cases} f(n) & \text{si } \forall k \leq n \; e \neq w(k) \\ g(e,n) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   Montrer soigneusement que B est récursive.
3. En déduire le lemme de branchement à l'aide du second théorème de point fixe.

   Théorème 1 (Théorème de point fixe, version fonctions récursives)**.** *Pour toute fonction récursive $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, il existe un code $e \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, h(e,n) = \varphi_e(n)$.*

   Pour vos dîners mondains Ce lemme peut être une étape importante pour prouver le théorème de Kreisel-Lacombe-Shoenfield qui stipule entre autres que toute fonction calculable $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})_{\text{eff}} \to \mathbb{N}$, où $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})_{\text{eff}}$ désigne l'ensemble des suites calculables, est nécessairement continue.
   En réalité, avec un peu plus de travail et un lemme de branchement plus fort où l'on programme directement avec des codes pour f, g et w, on peut même montrer que l'on peut calculer en chaque point de $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})_{\text{eff}}$ un "η" correspondant à la définition de la continuité.

Exercice 6.
Montrer que toute fonction récursive peut s'écrire avec un unique schéma de minimisation. Plus formellement, montrer que pour tout fonction $f : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ récursive il existe $g, h : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ primitives récursives telles que :

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), g((\mu n.h(n,x)), x) = f(x)$$

et $x \mapsto g((\mu n.h(n,x)), x)$ et f ont même domaine de définition.