TD 13

Exercice 1. *La poste par correspondance*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ. Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l'existence d'une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d'éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i. Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l'existence d'une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :

1. $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
2. $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
3. $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
4. $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$

2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre le problème est décidable.

3. Montrer l'équivalence entre PCP et PCPM, c'est à dire qu'à partir d'un algorithme résolvant toute instance de PCP, vous pouvez créer un algorithme résolvant toute instance de $PCPM$, et inversement.

Indication : Dans le cas PCP permet de résoudre $PCPM$, vous pourrez ajouter à l'alphabet deux lettres $*$ et \$ et utiliser les deux morphismes p et s suivant :
$\forall a_1 \ldots a_k \in \Sigma^*$, $p(a_1 \ldots a_k) = *a_1 * \ldots * a_k$ *et* $s(a_1 \ldots a_k) = a_1 * \ldots a_k *$.

4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM ?

5. Montrer que PCP est indécidable.

Indication : Pour montrer cela, vous pouvez montrer que PCP permet de résoudre l'arrêt : à une machine M et une entrée x on peut créer une instance de PCP qui est acceptée si et seulement si la machine M s'arrête sur l'entrée x.

Exercice 2. *Calculs (in)faisables ?*

Les fonctions suivantes sont-elles calculables ?

1. la fonction partielle R définie par $R(\mathfrak{M}, x) = n_{\rightarrow}$ où $n_{\rightarrow}$ est le nombre de mouvements vers la droite que fait la tête de la machine $\mathfrak{M}$ lors du calcul sur l'entrée x.

2. la fonction Q définie par $Q(\mathfrak{M}, x) = n_q$ où n_q est le nombre d'états utilisés par la machine $\mathfrak{M}$ lors du calcul sur l'entrée x.

3. l'entrée n utilisera un alphabet composé des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, des variables $\{x_1, \ldots, x_k\}$ à interpréter sur $\mathbb{N}$, les symboles $+$ et $=$ et les connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$. Par exemple : $\forall x_1, x_2 \quad (\exists x_3 \quad x_1 + x_2 = x_3) \wedge (\exists x_4 \quad x_2 = x_4)$. n est une entrée *valide* si n représente une formule sans variable libre (toutes les variables qui apparaissent sont précédemment quantifiées).

La fonction f est la suivante : si n est valide, $f(n)$ renvoie une preuve que la formule n est vraie ou fausse, et sinon $f(n)$ est le symbole blanc.

4. l'entrée n représente un polynôme à coefficients entiers une (resp. à plusieurs) variable(s) et $f(n)$ renvoie une racine entière du polynôme si cela existe, et ε sinon.

Exercice 3. *Re*

Un nombre réel a est dit *récursif* s'il est *récursivement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récursives F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| |a| - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récursif.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$ et e sont récursifs.
3. Montrer que l'ensemble des réels récursifs est dénombrable.
4. Donner un exemple de réel non récursif.

Exercice 4. *Encodages*

1. Trouver une bijection primitive récursive entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Concrètement, on souhaite trouver $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ et des projections $\pi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($i \in \{1,2\}$) telles que :

$$\pi_i(\alpha(n_1, n_2)) = n_i \qquad \alpha(\pi_1(p), \pi_2(p)) = p$$

2. Trouver une bijection $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ entre les listes d'entiers et les entiers, une fonction cons : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitive récursive tel que :

$$\mathrm{cons}(n, \lceil \ell \rceil) = \lceil n :: \ell \rceil$$

3. Trouver un opérateur fold tel que pour toute fonction primitive récurisve $z : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ et $r : \mathbb{N}^{k+2+n} \to \mathbb{N}^n$, on ait $\mathrm{fold}(z,r) : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^n$ primitif récursif vérifiant :

$$\mathrm{fold}(z,r)(a_1 \dots a_k, \lceil [] \rceil) = z(a_1 \dots a_k)$$

$$\mathrm{fold}(z,r)(a_1 \dots a_k, \lceil h :: t \rceil) = r(a_1 \dots a_k, h, \lceil t \rceil, \mathrm{fold}(z,r)(a_1 \dots a_k, \lceil t \rceil))$$

4. (Difficile) Comment généraliser cela aux arbres ? On note $\bar{\cdot} : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ la bijection entre les arbres et les entiers, et $\lfloor \cdot \rfloor : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$ la bijection entre les listes d'arbre et les entiers. *(On rappelle qu'un arbre est soit un arbre vide, soit une paire d'un entier et d'une liste d'arbres.)*

Exercice 5. *Énumération*

On dit que que la fonction $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une *fonction d'énumération* pour l'ensemble A de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ si pour tout e, la fonction $\varphi_e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi_e(x) = \varphi(e,x)$ est dans A, et si réciproquement, pour toute fonction $f \in A$, il existe $e \in \mathbb{N}$ telle que $\forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = \varphi_e(x)$.

Montrer que $\mathcal{REC}_1$, l'ensemble des fonctions récursives d'arité 1, admet une fonction d'énumération récursive.