

---

**TD 10**


---

**Exercice 1.***Calculs*

On considère les nombres encodés en binaire. Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L’addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.


**Exercice 2.***Palindromes*

Soit  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alphabet et soit  $x$  un mot de  $\Sigma^*$ . Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant  $x$  la machine écrit  $x^{-1}$  ( $x$  écrit à l’envers)
2. la machine accepte  $x$  ssi  $x$  s’écrit  $yy^{-1}$  pour un certain  $y \in \Sigma^*$ .
3. la machine accepte  $x$  ssi  $x$  s’écrit  $yy$  pour un certain  $y \in \Sigma^*$ .

**Exercice 3.***Crocodile pusillanime*

Supposons qu’une machine de Turing s’arrête au bout de  $t$  étapes de calcul en consommant  $s$  cases mémoires (par *consommées*, on entend les cases mémoires qui sont parcourues pendant le calcul).

 Quelle(s) relation(s) existent entre  $t$  et  $s$  ?

**Exercice 4.***Algébriques*

1. Montrez que n’importe quel langage algébrique déterministe peut être reconnu par une machine de Turing.
2. Construisez une machine de Turing qui reconnaît le langage  $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 5.***Économies*

Soit  $M$  une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de  $M$  ce mot est entièrement lu par  $M$  au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier  $c \geq 1$  il existe une constante  $a$  et une machine de Turing  $M'$  à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que  $M$  et telle que si  $M$  consomme  $s(|x|)$  cases mémoires sur l’entrée  $x$  alors  $M'$  consomme au plus  $a + |x| + s(|x|)/c$  cases mémoires sur la même entrée.
2. Montrez que pour tout entier  $c \geq 1$  il existe une constante  $a$  et une machine de Turing  $M'$  à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que  $M$  et telle que si  $M$  s’arrête sur l’entrée  $x$  en  $t(|x|)$  étapes alors  $M'$  s’arrête sur la même entrée en  $a + |x| + t(|x|)/c$  étapes au plus.

**Exercice 6.***Aplustre hydriforme*

On appelle **machine de Turing à écriture unique** une machine de Turing à un ruban bi-infini qui peut modifier chacune des cases mémoire au plus une fois. Ce modèle est-il équivalent au modèle usuel des machines de Turing ?