TD 5

Exercice 1. *Inhéremment Ambiguë*

1. Montrer qu'un langage rationnel ne peut pas être inhéremment ambiguë.
2. Montrer que la grammaire suivante est ambiguë.
$$E \longrightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a \mid b$$
3. Trouver une grammaire non-ambiguë qui reconnaît le même langage que la grammaire précédente.
4. Trouver une grammaire hors-contexte qui reconnaît le langage
$$A = \left\{ a^i b^j c^k | i, j, k \geq 0 \text{ et } (i = j \text{ ou } j = k) \right\}$$
5. *(Bonus)* Montrer que toute grammaire pour le langage précédent est ambiguë.

Exercice 2. *Un peu de programmation*

$Stmt \rightarrow$ **if b then** $Stmt$ | **if b then** $Stmt$ **else** $Stmt$ | **a**

1. Montrer que cette grammaire est ambiguë.
2. Proposer une grammaire non ambiguë pour le même langage.

Exercice 3. *Mélange*

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u, v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :

— si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{v\}$

— si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{u\}$

— si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u, v) = x.\,\mathrm{Mel}(u', v) \cup y.\,\mathrm{Mel}(u, v')$.

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L, L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u, v)$.

1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. (Bonus) Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 4. *Morceaux de grammaires*

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants.

1. L'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$ et son complémentaire.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b.
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b.
5. $\{w\#\overline{w}\#,\ w \in (a + b)^*\}$, avec $\overline{w_1 w_2 \ldots w_n} = w_n \ldots w_2 w_1$.
6. $\{w\#w' | w, w' \in (a + b)^* \text{ et } w \neq w'\}$.
7. L'ensemble des mots de $(a + b)^*$ qui ne sont pas de la forme ww.
Indication : les mots qui ne sont pas de la forme ww et qui sont de longueur paire sont de la forme xy avec x et y de longueur impaire, et une autre condition sur x et y.