

DM 2 - à rendre avant le 19/12/2017

Exercice 1.*À la file indienne*

On définit un automate à file en reprenant la définition d’un automate à pile, et en changeant la notion de calcul sous la forme : pour tous, $(q, x, z) \in Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Z$, $(q', z') \in \delta(q, x, z) \subseteq Q \times (Z \cup \{\varepsilon\})$, alors $(q, xu, zw) \rightarrow (q', u, wz')$; avec Z l’alphabet de pile, A l’alphabet de mot et Q l’ensemble des états de l’automate.

1. Prouver que les langages algébriques sont reconnus par les automates à file.
2. Prouver que les automates à file reconnaissent strictement plus de langages que les automates à pile.
3. Montrer que les automates à file sont équivalents aux machines de Turing.
4. Qu’en est-il des automates à deux piles? (La fonction de transition est maintenant $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Z^2 \rightarrow \mathcal{P}(Q \times (Z^*)^2)$).

Exercice 2.*Des racines et de ailes*

Montrer, en utilisant le schéma de minimisation, que les fonctions suivantes sont récursives. Parmi elles, lesquelles sont primitives récursives?

1. $f(n) = \sqrt{n}$ si n est un carré parfait, indéfini sinon.
2. $f(n) = n/2$ si n est pair, indéfini sinon.
3. $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Exercice 3.*Une fonction de caractère*

Soit $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une application. On rappelle que la fonction indicatrice du graphe de f est définie par

$$\delta_f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est récursive si et seulement si δ_f l’est également.