

## DM 2 - à rendre avant le 19/12/2017

**Exercice 1.***À la file indienne*

On définit un automate à file en reprenant la définition d’un automate à pile, et en changeant la notion de calcul sous la forme : pour tous,  $(q, x, z) \in Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Z$ ,  $(q', z') \in \delta(q, x, z) \subseteq Q \times (Z \cup \{\varepsilon\})$ , alors  $(q, xu, zw) \rightarrow (q', u, wz')$ ; avec  $Z$  l’alphabet de pile,  $A$  l’alphabet de mot et  $Q$  l’ensemble des états de l’automate.

1. Prouver que les langages algébriques sont reconnus par les automates à file.
2. Prouver que les automates à file reconnaissent strictement plus de langages que les automates à pile.
3. Montrer que les automates à file sont équivalents aux machines de Turing.
4. Qu’en est-il des automates à deux piles? (La fonction de transition est maintenant  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Z^2 \rightarrow \mathcal{P}(Q \times (Z^*)^2)$ ).

**Exercice 2.***Des racines et de ailes*

Montrer, en utilisant le schéma de minimisation, que les fonctions suivantes sont récursives. Parmi elles, lesquelles sont primitives récursives?

1.  $f(n) = \sqrt{n}$  si  $n$  est un carré parfait, indéfini sinon.
2.  $f(n) = n/2$  si  $n$  est pair, indéfini sinon.
3.  $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

**Exercice 3.***Une fonction de caractère*

Soit  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  une application. On rappelle que la fonction indicatrice du graphe de  $f$  est définie par

$$\delta_f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est récursive si et seulement si  $\delta_f$  l’est également.