DM 1 - à rendre avant le 16/10/2017

Exercice 1. *Residuels*

On définit sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ le langage L composé de tous les mots non vides qui contiennent soit un seul b, soit un nombre pair de b. Calculez tous les langages résiduels de L, puis en déduire l'automate minimal qui reconnaît L.

Exercice 2. *Au carré*

Soit $L \subseteq \{a, b\}^*$ un langage.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?
2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?
3. Que deviennent ces implication pour un langage à une lettre ?

Exercice 3. *Distance de Hamming*

On travaille sur l'alphabet $\{0, 1\}$. La distance de Hamming $H(x, y)$ entre deux mots x et y est le nombre de positions qui les distinguent, par exemple $H(110, 011) = 2$. Si $|x| \neq |y|$, alors leurs distance de Hamming est infinie. Si x est un mot et A est un langage sur $\{0, 1\}$, la distance de Hamming entre x et A est la distance entre x et le mot le plus proche de x dans A :

$$H(x, A) := min_{y \in A} H(x, y)$$

Pour un langage $A \subseteq \{0, 1\}^*$ et $k \geq 0$, on définit l'ensemble de mots de distance de Hamming au plus k de A :

$$N_k(A) := \{x | H(x, A) \leq k\}$$

Prouvez que si A est un langage régulier alors $N_k(A)$ est régulier.